

Вариант D (Условия задач и их решения)

В гильбертовом пространстве функций $u = u(x) \in L^2(0, l)$ поставлена следующая задача минимизации **без ограничений**:

$$J(u) = \int_0^l \left(\frac{1}{2} \int_0^x u(s) ds + \frac{1}{2} \int_{l-x}^l u(s) ds - f(x) \right)^2 dx \rightarrow \inf, \quad u(x) \in L^2(0, l), \quad (1)$$

где $f(x) \in L^2(0, l)$ — некоторая заданная функция.

1. Приведите пример такой функции $f(x) \in L^2(0, l)$, для которой нижняя грань $J_* = \inf_{u \in L^2(0, l)} J(u) = 0$, **но не достигается**, т. е. $U_* = \emptyset$.

Ответ: $f(x) \equiv 1$ на $x \in [0, l]$.

Решение. Функционал $J(u)$ является квадратичным вида $J(u) = \|Au - f\|_H^2$, где

$$Au(x) = \frac{1}{2} \int_0^x u(s) ds + \frac{1}{2} \int_{l-x}^l u(s) ds, \quad x \in (0, l), \quad A \in L(H \rightarrow H), \quad H = L^2(0, l). \quad (2)$$

Заметим, что значениями оператора A являются *непрерывные* на $[0, l]$ функции: $Au(x) \in C[0, l]$, причём $Au(0) = 0$. Покажем, что подходящим объектом является целевая непрерывная функция $f(x) = 1$, у которой $f(0) \neq 0$ и поэтому она не принадлежит области значений оператора A . Построим для $f(x) = 1$ минимизирующую последовательность $u_n = u_n(x) \in L^2(0, l)$ вида

$$u_n(x) = \begin{cases} 2n, & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < x < l, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Значения оператора A на элементах u_n легко вычисляются:

$$Au_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq l - \frac{1}{n}, \\ 2 + n(x - l), & l - \frac{1}{n} \leq x \leq l, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$$

и при $n \rightarrow \infty$ они сходятся к функции $f(x) = 1$ по норме пространства $L^2(0, l)$, т. е. $J(u_n) \rightarrow J_* = 0$.

2. Легко проверить, что для функции $f(x) = x$ нижняя грань равна нулю и достигается, в частности, на элементе $u_0 = u_0(x) = \frac{2x}{l} \in U_*$. Для той же функции $f(x) = x$ укажите **другое оптимальное** решение u_* с **мёньшим** значением нормы:

$$J(u_*) = J_* = 0, \quad \|u_*\|_{L^2(0, l)} < \|u_0\|_{L^2(0, l)}.$$

Ответ: $u_*(x) = 1, \quad x \in (0, l)$.

Решение. Во-первых, вычислим норму указанного оптимального решения:

$$\|u_0\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l \left(\frac{2x}{l}\right)^2 dx = \frac{4}{3}l. \quad (3)$$

Во-вторых, найдём *нормальное* оптимальное решение $u_* = u_*(x)$ задачи (1) для функции $f(x) = x$. Для него должно выполняться тождество

$$Au_*(x) = \frac{1}{2} \int_0^x u_*(s) ds + \frac{1}{2} \int_{l-x}^l u_*(s) ds \equiv x, \quad x \in [0, l],$$

после дифференцирования которого по x получаем соотношение

$$\frac{1}{2} u_*(x) + \frac{1}{2} u_*(l-x) \equiv 1, \quad x \in (0, l). \quad (4)$$

Из (4) видно, что значения $u_*(x)$ при $x \in (l/2, l)$ выражаются через значения $u_*(x)$ при $x \in (0, l/2)$ и наоборот, поэтому будем считать *неизвестными*, например, значения $u_*(x)$ при $x \in (0, l/2)$. Тогда с учётом (4) задача поиска нормального решения задачи (1) сводится к задаче *безусловной минимизации* в пространстве $L^2(0, l/2)$:

$$\begin{aligned} j(u) &= \int_0^{l/2} u^2(x) dx + \int_{l/2}^l (2 - u(l-x))^2 dx = \\ &= \int_0^{l/2} u^2(x) dx + \int_0^{l/2} (2 - u(x))^2 dx \rightarrow \inf, \quad u(x) \in L^2(0, l/2). \end{aligned} \quad (5)$$

Эта задача легко решается с помощью условия Ферма $j'(u) = 0$:

$$u_*(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in (0, l/2) \quad \xrightarrow{(4)} \quad u_*(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in (l/2, l). \quad (6)$$

Вычислив норму найденного решения, убеждаемся в том, что оно соответствует заданным требованиям:

$$\|u_*\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l 1^2 dx = l < \frac{4}{3}l \stackrel{(3)}{=} \|u_0\|_{L^2(0,l)}^2,$$